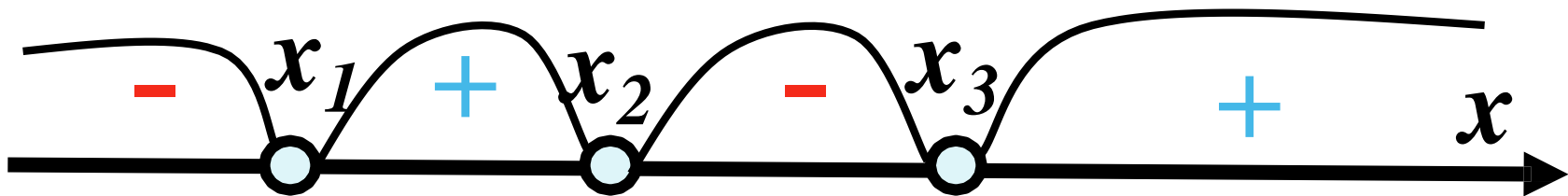


Розв'язування нерівностей методом інтервалів

Куделя Інна Степанівна, вчитель математики
Новодмитрівської ЗОШ I-III ступенів
Золотоніської районної ради Черкаської області



Розглянемо метод інтервалів для розв'язування нерівностей виду:

$$(x - x_1) (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) > 0,$$

$$(x - x_1) (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) > 0,$$

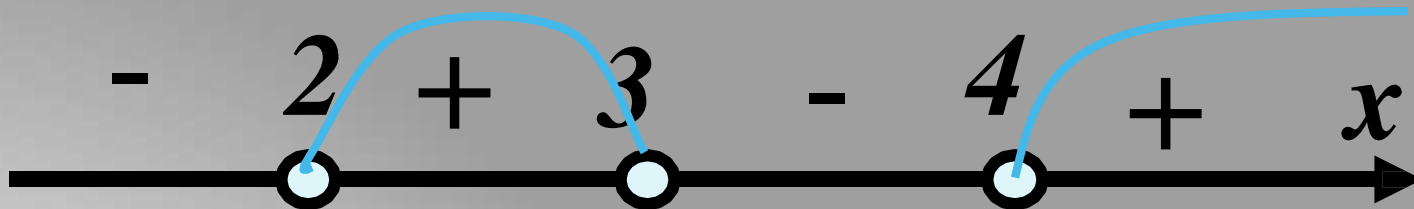
$$(x - x_1) (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \leq 0,$$

$$(x - x_1) (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \geq 0,$$

де $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, n – натуральне число.

- 1) Позначимо на координатній прямій нулі функції $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$;
- 2) Відмітимо знаки функції на утворених проміжках (на крайньому праворуч - "+", на решті - чергуються);
- 3) Вибираємо проміжки, на яких функція $f(x)$ набуває значень відповідного знака;
- 4) Записуємо множину розв'язків нерівності.

Приклад 1



Розв'яжіть нерівність: $(x-2)(x-3)(x-4) > 0$.

- Позначимо на осі Ox точки $2; 3; 4$
- Над інтервалами $(4; +\infty)$; $(3; 4)$; $(2; 3)$; $(-\infty; 2)$ справа наліво поставимо по чергово знаки «+»; «-».
- Відповідь: $(2; 3) \cup (4; +\infty)$

Приклад 2

Розв'яжіть нерівність : $(2-x)(x^2-4x+3)(x+1)>0$

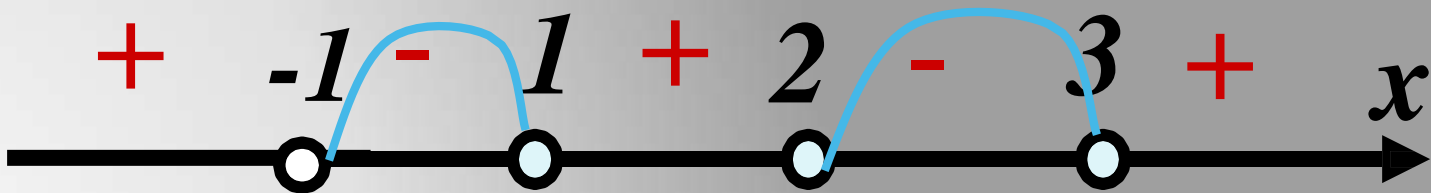
- Разкладемо квадратний тричлен на множники:

$$(2-x)(x-3)(x-1)(x+1)>0$$

- Помножимо обидві частини нерівності на -1 :

$$(x-(-1))(x-1)(x-2)(x-3)<0$$

- Позначимо на осі Ox точки $-1; 1; 2; 3$

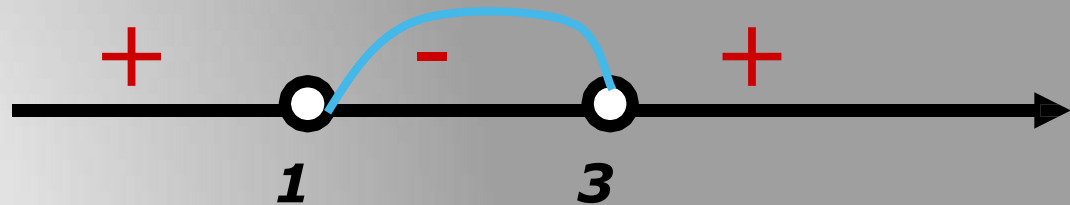


- Відповідь: $(-1;1) \cup (2;3)$

Приклад 3

Розв'яжіть нерівність: $(x-1)(x-3)(x^2+x+1)<0$

- Тричлен x^2+x+1 приймає тільки додатні значень ($D<0$).
- Наша нерівність рівносильна $(x-1)(x-3)<0$
- Позначимо на осі Ox точки 1; 3



Відповідь: $(1;3)$

Якщо у нерівностях не всі числа x_1, x_2, \dots, x_n є різними, то розглянутий алгоритм знаходження знаків функції $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$ застосовувати не можна.

Для розв'язування таких нерівностей використовують **загальний метод інтервалів**:

На крайньому праворуч проміжку завжди $f(x) > 0$ (“+”)

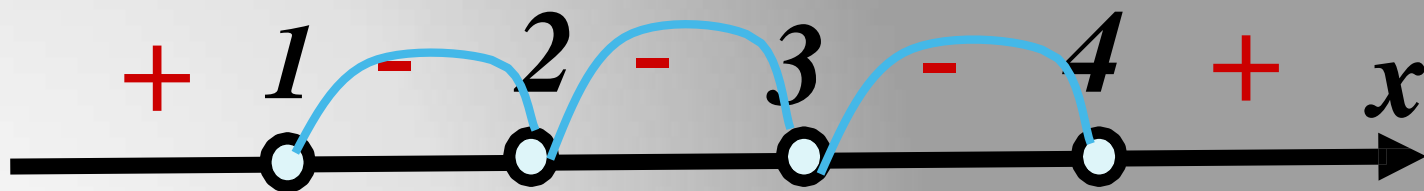
Рухаючись справа наліво при переході через числа $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n$ функція змінює знак, якщо степінь двочлена $(x - x_m)$ непарний і не змінює знак, якщо степінь двочлена $(x - x_m)$ парний.

Приклад 4

Розв'яжіть нерівність:

$$(x-1)^3(x-2)^2(x-3)^4(x-4) < 0$$

Позначимо на осі Ox точки $1;2;3;4$, а потім на кожному інтервалі дослідимо знак многочлена $f(x) = (x-1)^3(x-2)^2(x-3)^4(x-4)$



Відповідь: $(1;2) \cup (2;3) \cup (3;4)$.

Приклад 5

Розв'яжіть нерівність:

$$\frac{3x+10}{x+6} > 2$$

Зведемо дану нерівність до нерівності, лівою частиною якої є дріб, а

правою – нуль: $\frac{3x+12-2x-12}{x+6} > 0; \quad \frac{x-2}{x+6} > 0$

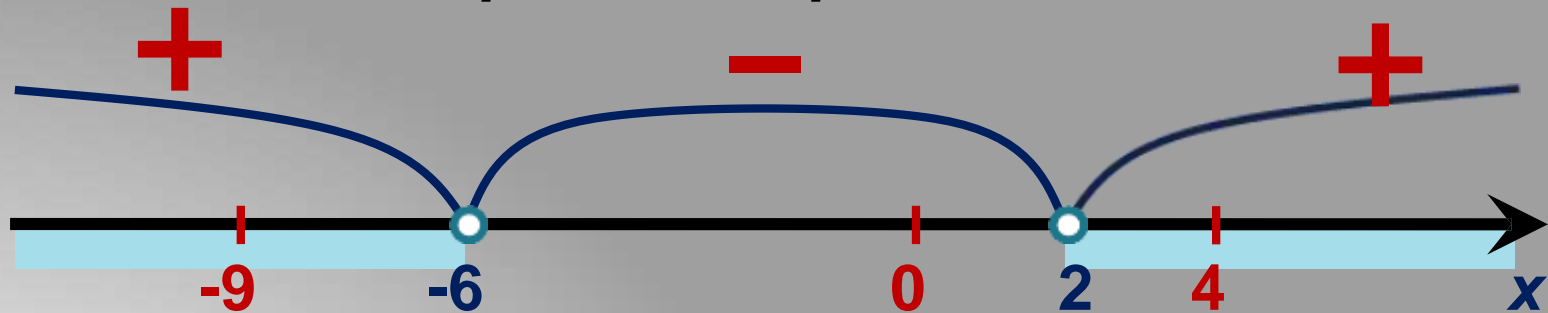
Нулем функції $f(x) = \frac{x-2}{x+6}$ є $x = 2$; якщо $x = -6$, то функція не визначена.

Позначимо на координатній прямій ці точки:



Отримаємо три проміжки

Визначимо знаки $(x - 2)/(x + 6)$ на кожному з отриманих проміжків:



$$1). (x - 2)/(x + 6) = (-9 - 2)/(-9 + 6) > 0$$

$$2). (x - 2)/(x + 6) = (0 - 2)/(0 + 6) < 0$$

$$3). (x - 2)/(x + 6) = (4 - 2)/(4 + 6) > 0$$

Оскільки за умовою $(x - 2)/(x + 6) > 0$, то розв'язком

є множина $x \in (-\infty; -6) \cup (2; +\infty)$

Відповідь: $(-\infty; -6) \cup (2; +\infty)$.